

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(đề thi gồm 01 trang)

Bài 1. (3 điểm)

Giải phương trình: $x^2 + 1 + \sqrt{\frac{(x^2 - 1)(2 - x)}{x}} = \frac{4}{x}.$

Bài 2. (4 điểm)

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 2) = 2 \ln \frac{y + \sqrt{y^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ (x - 2) \log_3 x + y \log_3 y = x + 1 \end{cases}$$

Bài 3. (3 điểm)

Cho x, y là các số thực thỏa mãn: $x^2 + y^2 + \frac{3}{2} = 2(x + y)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{6 - 2(x - 1)(y - 1)}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}.$$

Bài 4. (3 điểm)

Tìm m để phương trình: $m(\sin 2x + 1) + 1 = (m - 3)(\sin x + \cos x)$ có đúng hai nghiệm phân biệt trên đoạn $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Bài 5. (4 điểm)

Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ biết $AB = 2$, $CD = 2\sqrt{3}$, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$ và góc giữa AD và BC bằng 30° .

Bài 6. (3 điểm)

Trong một buổi tọa đàm về “Tình yêu tuổi học đường” tại lớp 12A, có tất cả 21 bạn tham gia và có 4 cặp có tình cảm với nhau (không có học sinh nào thuộc về nhiều cặp). Cô giáo chọn ra 5 bạn để tham gia một trò chơi tập thể. Hỏi có bao nhiêu cách chọn mà trong đó, có ít nhất một cặp có tình cảm với nhau?

HẾT

ĐÁP ÁN

Bài 1. (3 điểm) Giải phương trình: $x^2 + 1 + \sqrt{\frac{(x^2 - 1)(2 - x)}{x}} = \frac{4}{x} \quad (*)$.

Lời giải.

Điều kiện $\frac{(x^2 - 1)(2 - x)}{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1; 0) \cup [1; 2]$. (0,5đ)

Vế trái của (*) dương nên $\frac{4}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$, do đó, ta chỉ cần xét $x \in [1; 2]$ và ta có:

$$\begin{aligned} x^3 + x + \sqrt{x(x^2 - 1)(2 - x)} &= 4 \\ \Leftrightarrow x^3 + x - 4 + \sqrt{x(x^2 - 1)(2 - x)} &= 0 \end{aligned} \quad (0,5đ)$$

$$\Leftrightarrow (x^3 - x) - 2(2 - x) + \sqrt{(x^3 - x)(2 - x)} = 0$$

Đặt $u = \sqrt{x^3 - x} \geq 0, v = \sqrt{2 - x} \geq 0$ thì ta có

$$\begin{aligned} u^2 - 2v^2 + uv &= 0 \Leftrightarrow (u - v)(u + 2v) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u + 2v = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1đ)$$

Phương trình thứ hai vô nghiệm vì u, v không thể đồng thời bằng 0. Do đó

$$\begin{aligned} u = v &\Leftrightarrow \sqrt{x^3 - x} = \sqrt{2 - x} \\ \Leftrightarrow x^3 - x &= 2 - x \Leftrightarrow x^3 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

So sánh điều kiện, ta thấy nghiệm này thỏa mãn nên phương trình (*)

có nghiệm duy nhất là $x = \sqrt[3]{2}$ (1đ)

Bài 2. (4 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 2) = 2 \ln \frac{y + \sqrt{y^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ (x - 2) \log_3 x + y \log_3 y = x + 1 \end{cases}$$

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{Phương trình đầu} &\Leftrightarrow x^3 - y^3 - 2(x - y) = 2 \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) - 2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &\Leftrightarrow x^3 - 2x + 2 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = y^3 - 2y + 2 \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \end{aligned}$$

$$\text{Xét } f(t) = t^3 - 2t + 2 \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \quad (1đ)$$

Tập xác định: $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3t^2 - 2 + \frac{2}{\sqrt{t^2 + 1}} \quad \text{Đặt } u = \sqrt{t^2 + 1}; u \geq 1 \\ \Rightarrow 3t^2 - 2 + \frac{2}{\sqrt{t^2 + 1}} &= 3(u^2 - 1) - 2 + \frac{2}{u} = \frac{3u^3 - 5u + 2}{u} \\ &= \frac{(u - 1)(3u^2 + 3u - 2)}{u} \geq 0 \quad \forall u \geq 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f'(t) \geq 0 \quad \forall t \in R$ hay $f(t)$ là hàm đồng biến trên R

Từ $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ (1đ)

Thay vào phương trình thứ hai, ta được: $(2x-2)\log_3 x = x+1$

$x = 1$ không là nghiệm $\Rightarrow x \neq 1$ (0,25đ)

Phương trình $\Leftrightarrow \log_3 x = \frac{x+1}{2x-2} \quad (x > 0, x \neq 1)$

VT là hàm đồng biến trên $(0, +\infty)$ (0,25đ)

VP nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$ (0,25đ)

nên phương trình trên có không quá 2 nghiệm. (0,25đ)

Nhẩm được $x = 3$ và $x = \frac{1}{3}$ là nghiệm (0,5đ)

Suy ra phương trình có đúng 2 nghiệm là $x = 3$ và $x = \frac{1}{3}$.

Kết luận : Tập nghiệm của hệ là : $(x, y) \in \left\{ (3; 3); \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) \right\}$ (0,5đ)

Bài 3. (3 điểm)

Cho x, y là các số thực thỏa mãn: $x^2 + y^2 + \frac{3}{2} = 2(x+y)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{6 - 2(x-1)(y-1)}{(x-1)^2 + (y-1)^2}.$$

Lời giải.

$$x^2 + y^2 + \frac{3}{2} = 2(x+y) \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{2}$$

Đặt $a = x-1$, $b = y-1$

Ta có $P = 12 - 4ab$ với $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$ (1đ)

Do $-(a^2 + b^2) \leq 2ab \leq a^2 + b^2$ nên $11 \leq P \leq 13$ (1đ)

GTLN của P là 13 khi $(x, y) = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ (0,5đ)

GTNN của P là 11 khi $(x, y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ (0,5đ)

Bài 4. (3 điểm)

Tìm m để phương trình: $m(\sin 2x + 1) + 1 = (m - 3)(\sin x + \cos x)$ (*) có đúng hai nghiệm phân biệt trên đoạn $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Lời giải.

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x \quad (1 \leq t \leq \sqrt{2}), \quad (0,5\text{đ})$$

$$(*) \Leftrightarrow mt^2 + 1 = (m - 3)t \Leftrightarrow m(t - t^2) = 3t + 1 \quad (**)$$

$t = 1$ không thỏa phương trình (**)

$$(**) \Leftrightarrow m = \frac{3t + 1}{t - t^2} = f(t) \quad (1 < t \leq \sqrt{2}) \quad (0,5\text{đ})$$

$$f'(t) = \frac{3t^2 + 2t - 1}{(t - t^2)^2} > 0 \quad \forall t \in (1; \sqrt{2}]$$

Suy ra f đồng biến trên $(1; \sqrt{2}]$ (0,5đ)

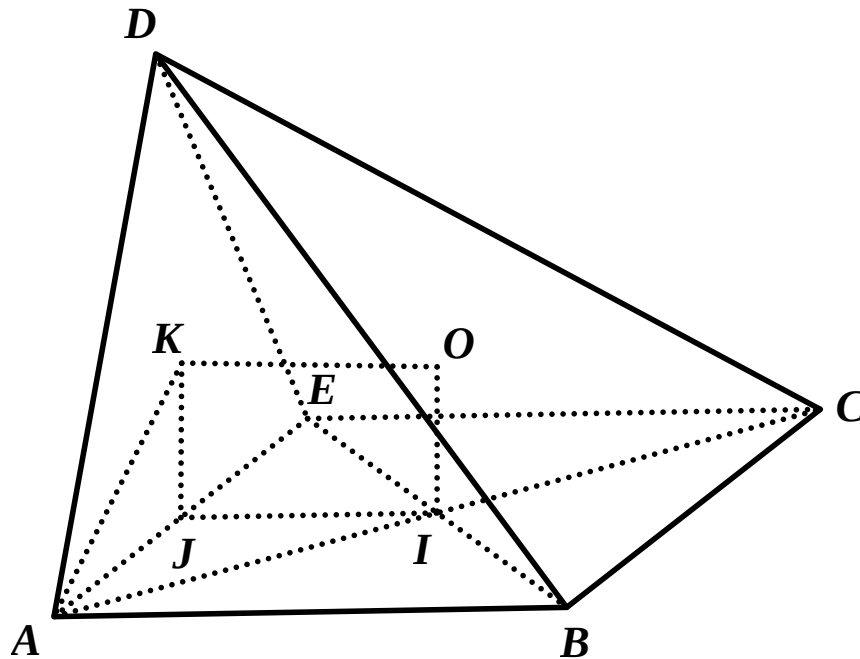
Ứng với mỗi $t \in (1; \sqrt{2})$ pt trình $t = \sin x + \cos x$ có đúng 2 nghiệm $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ (0,75đ)

Như vậy (*) có đúng hai nghiệm phân biệt trên đoạn $[0; \frac{\pi}{2}]$ khi

$$m < f(\sqrt{2}) = -\frac{8 + 7\sqrt{2}}{2} \quad (0,75\text{đ})$$

Bài 5. (4 điểm)

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 2$, $CD = 2\sqrt{3}$, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$ và góc giữa AD và BC bằng 30° . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

Lời giải.

Dựng hình chữ nhật $ABCE$. Ta có AB, CE vuông góc với mp(ADE) và $(AD, AE) = 30^\circ$.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, AE ; K là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADE$; O là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp $D.ABCE$. (1đ)

Suy ra $OK \perp (ADE)$ và $OI \perp (ABCD), KJ \perp AE$ (1đ)

$\Rightarrow OIJK$ là hình chữ nhật. (0,5đ)

Ta có $DE = \sqrt{DC^2 - CE^2} = 2\sqrt{2}$ (0,5đ)

$\Rightarrow AK = \frac{DE}{2\sin(\angle AD, AE)} = 2\sqrt{2}$ (0,5đ)

$\Rightarrow OA = \sqrt{AK^2 + OK^2} = \sqrt{AK^2 + IJ^2} = 3$ (0,5đ)

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng 3.

Bài 6. (3 điểm)

Trong một buổi tọa đàm về “Tình yêu tuổi học đường” tại lớp 12A, có tất cả 21 bạn tham gia và có 4 cặp có tình cảm với nhau (không có học sinh nào thuộc về nhiều cặp). Cô giáo chọn ra 5 bạn để tham gia một trò chơi tập thể. Hỏi có bao nhiêu cách chọn mà trong đó, có ít nhất một cặp có tình cảm với nhau?

Lời giải.

Gọi A là nhóm các học sinh có tình cảm với nhau (gồm 8 học sinh) và B là nhóm các học sinh còn lại (gồm 13 học sinh) (0,25đ)

* Trường hợp 1: Có đúng 1 cặp có tình cảm với nhau.

– Đầu tiên chọn 1 cặp có tình cảm với nhau: Có 4 cách chọn. (0,25đ)

– Tiếp theo ta chọn 3 học sinh trong đó không có 2 em nào có tình cảm với nhau, có 4 trường hợp:

+ 3 HS thuộc nhóm A: Có 2^3 cách chọn. (0,25đ)

+ 2 HS thuộc nhóm A và 1 HS thuộc nhóm B: Có $C_3^2 \cdot 2^2 \cdot C_{13}^1$ cách chọn. (0,25đ)

+ 1 HS thuộc nhóm A và 2 HS thuộc nhóm B: Có $C_3^1 \cdot 2 \cdot C_{13}^2$ cách chọn. (0,25đ)

+ 3 HS thuộc nhóm B: Có C_{13}^3 cách chọn. (0,25đ)

Như vậy số cách chọn trong trường hợp 1 là $4(2^3 + C_3^2 \cdot 2^2 \cdot C_{13}^1 + C_3^1 \cdot 2 \cdot C_{13}^2 + C_{13}^3)$
 $= 3672$ (0,25đ)

* Trường hợp 2: Có đúng 2 cặp có tình cảm với nhau.

– Đầu tiên chọn 2 cặp có tình cảm với nhau: Có $C_4^2 = 6$ cách chọn. (0,25đ)

– Tiếp theo ta chọn 1 học sinh còn lại: có C_{17}^1 cách chọn. (0,25đ)

Như vậy số cách chọn trong trường hợp 2 là $6C_{17}^1 = 102$. (0,25đ)

Vậy tổng cộng có 3774 cách chọn ra 5 bạn mà trong đó, có ít nhất một cặp có tình cảm với nhau. (0,5đ)